

УДК 521.1; 629.78

ОПТИМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ ДЛЯ ЭКСПЕДИЦИИ КА К АСТЕРОИДУ АПОФИС С ВОЗВРАЩЕНИЕМ К ЗЕМЛЕ

© 2013 г. В. В. Ивашкин¹, И. В. Крылов², А. Лан²

¹Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

²Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Поступила в редакцию 03.04.2013 г.

Одной из актуальных задач космонавтики является сейчас организация экспедиции к сближающемуся с Землей астероиду Апофис. В работе рассматривается задача определения энергетически оптимальных траекторий перелета КА к Апофису с последующим возвращением к Земле. Рассмотрены два варианта двигательных установок для этой экспедиции. В одном предполагается использование двигателей малой электрореактивной тяги. В другом варианте рассмотрен случай полета только с двигателями большой тяги. Показано, что в обоих случаях можно организовать экспедицию к Апофису, однако применение двигателей малой тяги позволяет заметно улучшить характеристики проекта.

DOI: 10.7868/S0320930X1304018X

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время одной из актуальных задач космонавтики является организация экспедиции к сближающемуся с Землей астероиду Апофис. До недавнего времени считалось, что существует высокая вероятность столкновения Апофиса и нашей планеты в 2036 г. При этом энергия возможного столкновения $E_{ст}$ оценивается примерно в 500 Мт ТНТ (для Тунгусского метеорита $E_{ст} \sim 12$ Мт ТНТ) (Ивашкин, Стихно, 2009). Поэтому первоочередная цель экспедиции подразумевала сбор информации, необходимой для уточнения орбиты астероида и проведения ее последующей коррекции. И хотя последние исследования, проведенные в начале 2013 г., позволили существенно снизить указанную вероятность, Апофис продолжает оставаться небесным телом, несущим потенциальную угрозу Земле. Другой важной целью экспедиции может стать доставка на Землю вещества астероида (Ахметшин и др., 2004).

В данной работе рассматривается задача формирования энергетически оптимальных траекторий КА по маршруту Земля–Апофис–Земля. Рассмотрено два варианта двигательных систем. В одном варианте исследуется комбинированная схема перелета, включающая в себя разгон КА до второй космической или гиперболической скорости двигателями большой тяги, ДБТ, и последующее управление КА при помощи электрореактивных двигателей малой тяги, ДМТ (Гродзовский и др., 1975). ДМТ обеспечивают высокие скорости истечения реактивной струи (более десяти километров в секунду), и их применение

особенно выгодно в условиях продолжительного гелиоцентрического перелета. В другом варианте исследован случай полета только с двигателями большой тяги.

В работе приводятся численные результаты, позволяющие выбрать оптимальные параметры экспедиции (время старта КА, продолжительность гелиоцентрических этапов перелета, величину и направление разгонного импульса и т.д.) и оценить массу спускаемого аппарата (СА) перед его входом в атмосферу Земли. В первом варианте рассмотрены случаи как идеальной тяги (ИТ), так и кусочно-постоянной тяги (КПТ). При этом предполагается, что в качестве носителя используется ракета среднего класса Союз-ФГ с разгонным блоком “Фрегат” (Автоматические КА, 2010), а в качестве ДМТ – электрореактивные двигатели СПД с энергетикой от современных солнечных батарей (Ахметшин и др., 2004).

В пп. 2–6 рассмотрен первый случай полета – с ДБТ и ДМТ. В п. 7 рассмотрен второй случай полета – с ДБТ.

2. СХЕМА ЭКСПЕДИЦИИ. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ

Комбинированная схема экспедиции КА к астероиду Апофис состоит из нескольких основных этапов. На геоцентрическом этапе КА, находящийся на низкой (с высотой $H \sim 200$ км) промежуточной околоземной орбите, в момент t_0 разгоняется при помощи ДБТ блока “Фрегат” (Автоматические КА, 2010) до второй космиче-

ской или гиперболической скорости. На первом гелиоцентрическом этапе КА при помощи ДМТ осуществляет перелет к астероиду таким образом, чтобы в момент t_1 стали равными гелиоцентрические координаты и скорости КА и Апофиса. На приастероидном этапе КА при помощи ДМТ гасит свою скорость с параболической до круговой и становится искусственным спутником Апофиса. Затем, после некоторого пребывания у астероида, его исследования и, может быть, взятия грунта, в момент t_2 КА снова разгоняется при помощи ДМТ до параболической скорости и выходит из сферы действия Апофиса. Наконец на втором гелиоцентрическом этапе КА при помощи ДМТ возвращается к Земле. При этом перелет осуществляется таким образом, чтобы в конечный момент экспедиции $t_f = t_3$ гелиоцентрические координаты КА и Земли были равны друг другу. Затем спускаемый аппарат входит в атмосферу и осуществляет посадку на поверхность Земли.

Таким образом, основная задача формулируется следующим образом.

Основная задача

Пусть задана общая продолжительность экспедиции $\Delta t = t_3 - t_0$. Задана также и продолжительность пребывания КА на орбите искусственного спутника (или на поверхности) Апофиса $\Delta t_a = t_2 - t_1$. Необходимо определить величину и направление разгонного импульса ДБТ, моменты t_0, t_1, t_2, t_3 , а также программы управления ДМТ на первом и втором гелиоцентрическом этапе, чтобы масса КА в момент t_3 (конечная масса) оказалась максимальной. В работе принято: $\Delta t = 2$ года, $\Delta t_a = 30$ сут.

Решение указанной задачи находится при помощи данных, полученных в результате решения более простых вспомогательных подзадач, которые соответствуют основным этапам перелета. Математические формулировки этих вспомогательных подзадач приводятся ниже.

3. СЛУЧАЙ ИДЕАЛЬНОЙ ТЯГИ И НУЛЕВОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ИЗБЫТКА СКОРОСТИ

3.1. Этап геоцентрического движения КА

Первая вспомогательная подзадача формулируется следующим образом.

Подзадача 1. Оценить массу КА $m(t_0)$ на геоцентрическом этапе после его разгона до заданной параболической или гиперболической скорости при условии, что этот разгон осуществляют ДБТ. Начальная масса КА, начальная околоземная орбита, а также характеристики ДБТ заданы.

Будем полагать, что вывод КА на низкую околоземную орбиту обеспечивает ракета-носитель Союз-ФГ, которая позволяет доставить массу $m_1 \approx 7130$ кг на высоту 200 км, а для набора КА второй космической или гиперболической скорости используется блок “Фрегат”. Удельная тяга ДБТ этого блока составляет ~ 326 с, а скорость истечения $W_\phi \sim 3.198$ км/с. Будем также полагать, что гравитационные потери при разгоне малы. Тогда масса аппарата $m(t_0)$ приблизительно определится следующим образом:

$$m(t_0) = m_1 \exp\left(-\frac{\Delta V}{W_\phi}\right) - m_\phi, \quad (1)$$

где $\Delta V = \sqrt{V_\infty^2 + \frac{2\mu_3}{R_1}} - \sqrt{\frac{\mu_3}{R_1}}$ – величина разгонного импульса, $m_\phi = 970$ кг – “сухая” масса “Фрегата”, V_∞ – гиперболическая скорость КА на “бесконечности”, μ_3 – гравитационный параметр Земли, R_1 – радиус промежуточной орбиты. Если $V_\infty = 0$, то масса КА в момент начала гелиоцентрического участка $m(t_0)$ равна 1630 кг.

3.2. Первый этап гелиоцентрического движения КА

На этом этапе движение КА рассматривается в гелиоцентрической эклиптической прямоугольной системе координат, ось Ox которой направлена в точку весеннего равноденствия, ось Oz – на северный полюс эклиптики, ось Oy дополняет систему до правой. Будем учитывать только силу тяготения Солнца и реактивную тягу ДМТ. Тогда уравнения движения КА имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{g}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{r}^T = [r_x, r_y, r_z]$ и $\mathbf{v}^T = [v_x, v_y, v_z]$ – гелиоцентрические радиус-вектор и вектор скорости КА (знак “T” здесь и далее означает транспонирование);

$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ – ускорение силы тяжести; μ – гравитационный параметр Солнца; $r = |\mathbf{r}|$ – расстояние от КА до центра Солнца; $\mathbf{u}^T = [u_x, u_y, u_z]$ – управляющее ускорение, создаваемое ДМТ. Текущая масса КА определяется уравнением:

$$\frac{dm}{dt} = -\beta, \quad (3)$$

где β – секундный массовый расход. В работе полагается, что мощность $N_{\text{дв}}$ ДМТ постоянна на протяжении всего перелета. Имеем:

$$N_{\text{дв}} = \frac{\beta W_e^2}{2}. \quad (4)$$

Здесь W_e – скорость истечения частиц в реактивной струе. В соответствии с (Гродзовский и др., 1975) интегрируем дифференциальное уравнение (3) с учетом (4). Тогда масса КА:

$$m(t_1) = \frac{2N_{дв}}{2N_{дв} + m(t_0)J_1} m(t_0), \quad (5)$$

где

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_1} u^2 dt. \quad (6)$$

Из (5) следует, что масса КА в момент t_1 тем больше, чем меньше величина интеграла (6). При этом граничные условия для данного этапа задаются в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0 + V_\infty \mathbf{l}, \\ \mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{v}(t_1) = \mathbf{v}_1, \end{aligned} \quad (7)$$

где \mathbf{l} – единичный вектор, параметры $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0$ соответствуют радиусу-вектору и вектору скорости Земли в момент t_0 , а параметры $\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1$ – радиусу-вектору и вектору скорости астероида в момент t_1 . Полагая, что никаких ограничений на управляющее ускорение не накладывается, сформулируем следующую вспомогательную подзадачу.

Подзадача 2. Найти такое управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(opt)}$, что траектория (2) удовлетворяет условиям (7) при $V_\infty = 0$, а функционал (6) минимален. Временной интервал $t_1 - t_0$ фиксирован.

Решение подзадачи 2 осуществляется в работе на основе предложенного авторами комплексного метода оптимизации (Ивашкин, Крылов, 2011; 2012). Известно, что эффективность решения нелинейных задач оптимального управления $\mathbf{u}^{(opt)}$ во многом зависит от удачного выбора начального приближения $\mathbf{u}^{(0)}$. В рамках комплексного метода такой выбор осуществляется при помощи следующей процедуры. Первоначально траектория КА строится методом динамического программирования в априорно заданной области изменения параметров (Беллман, 1960), что позволяет находить экстремум функции, не делая никаких предположений о ее выпуклости. Поскольку решение задачи в точной постановке, ввиду “проклятия размерности”, потребовало бы проведения чересчур большого объема вычислений, здесь принимается допущение о близости орбиты перелета к эклиптике, что позволяет независимо рассматривать движения КА в плоскостях OXY и OXZ . Последующее уточнение полученных результатов осуществляется методом “блуждающей” трубки (Моисеев, 1971). Окончательно искомая траектория строится в рамках полной пространственной модели (2) методом локального варьирования, который требует меньших по сравнению с методом “блуждающей” трубки вычис-

лительных ресурсов, обладая при этом худшей устойчивостью к локальным экстремумам (Черноусько, Баничук, 1973). Затем система (2) линеаризуется относительно полученной векторной функции $\mathbf{r}^{(0)}(t)$ (Белецкий, Егоров, 1964; Ивашкин, Чернов, 2000):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v}; \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{g}(\mathbf{r}^{(0)}(t)) + \mathbf{G}(\mathbf{r}^{(0)}(t))(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t)) + \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\mathbf{G}(\mathbf{r}) = \partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{r}$ – матрица размерности 3×3 (Ивашкин, 1975; Ивашкин, Крылов, 2011). Минимум функционала (6) для системы (8) при условиях (7) отыскивается на основе принципа максимума Понтрягина (Понтрягин и др., 1983; Болтянский, 1969). Гамильтониан задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} H &= \psi_0 u^2 + \Psi_v (\mathbf{g}(\mathbf{r}^{(0)}(t)) + \\ &+ \mathbf{G}(\mathbf{r}^{(0)}(t))(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t)) + \mathbf{u}) + \Psi_r \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_v &= -\Psi_r; \\ \dot{\Psi}_r &= -\mathbf{G}^T(\mathbf{r}^{(0)}(t))\Psi_v; \\ \Psi_0 &= -1, \end{aligned} \quad (9)$$

а управление $\mathbf{u}^{(opt)}$ находится из условия:

$$\mathbf{u} = \frac{\Psi_v}{2}. \quad (10)$$

Обозначим далее:

$$\Psi(t) = \{\Psi_v^T(t), \Psi_r^T(t)\}^T.$$

В результате решения линейной краевой задачи (8)–(10) с учетом (7) при $V_\infty = 0$ регулярными методами (Моисеев, 1971; Ивашкин, Чернов, 2000) определяется вектор $\Psi^{(0)}(t_0)$, а по формуле (10) – начальное приближение $\mathbf{u}^{(0)}$ для подзадачи 2.

После того, как вектор $\Psi^{(0)}(t_0)$ найден, подзадача 2 рассматривается в точной нелинейной постановке. В этом случае гамильтониан имеет вид:

$$H = \psi_0 u^2 + \Psi_v (\mathbf{g}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}) + \Psi_r \mathbf{v}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_v &= -\Psi_r; \\ \dot{\Psi}_r &= -\mathbf{G}^T(\mathbf{r})\Psi_v; \\ \Psi_0 &= -1, \end{aligned} \quad (11)$$

а оптимальное управление отыскивается по формуле (10). Двухточечная нелинейная краевая задача (2), (7), (10), (11) решается методом продолжения по параметру (Ц. На, 1982; Григолюк, Ша-

лашин, 1988; Жулин, 2007), уравнение которого задается формулой:

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{p})\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\psi}^{(0)}(t_0)), \quad (12)$$

где $\boldsymbol{\sigma}^T(\boldsymbol{\psi}(t_0)) = [(\mathbf{v}(t_1) - \mathbf{v}_1)^T, (\mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}_1)^T]$ – вектор невязок краевых условий,

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\psi}(t_0)) = \left[\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\psi}(t_0))}{\partial \boldsymbol{\psi}(t_0)} \right],$$

$$\boldsymbol{\psi}(t_0) = \mathbf{p}(\tau).$$

Проинтегрируем (12) по $\tau \in [0; 1]$ при начальном условии $\mathbf{p}(\tau)|_{\tau=0} = \boldsymbol{\psi}^{(0)}(t_0)$ (в данной работе для этого используется метод Рунге-Кутты четвертого порядка). Тогда для $\tau = 1$ получим искомым вектор сопряженных переменных $\boldsymbol{\psi}^{(opt)}(t_0) = \mathbf{p}(\tau)|_{\tau=1}$, а также оптимальную траекторию и управление $\mathbf{u}^{(opt)}$ для подзадачи 2. Для удобства последующих выкладок обозначим:

$$\mathbf{p}(t_0) = \boldsymbol{\psi}^{(opt)}(t_0), \quad p_v = |\boldsymbol{\psi}_v^{(opt)}|.$$

Следует отметить, что продолжение по параметру можно применять итерационно, используя вычисленные значения как новые начальные приближения для $\boldsymbol{\psi}(t_0)$, пока заданная точность не будет достигнута (Жулин, 2007). В нашем случае таких дополнительных итераций не потребовалось.

3.3. Этап астероидоцентрического движения

Третья вспомогательная подзадача формулируется следующим образом.

Подзадача 3. Оценить массу КА $m(t_2)$ в момент начала второго этапа гелиоцентрического движения при условии, что разгон и торможение КА вблизи астероида осуществляется с помощью ДМТ. При этом масса КА $m(t_1)$ в момент окончания первого этапа гелиоцентрического движения, орбита обращения вокруг астероида, а также характеристики ДМТ заданы.

КА прибывает к Апофису, имея относительно него вторую космическую скорость. Следовательно, в начале третьего этапа КА должен за счет двигателей малой тяги погасить свою скорость, например до первой космической, и стать искусственным спутником астероида. Оценивая радиус сферы действия Апофиса (Охоцимский, Сихарулидзе, 1990; Белецкий, 2009), получим:

$$R_a = r_{ac} \left(\frac{m_a}{m_c} \right)^{\frac{2}{5}},$$

где r_{ac} – расстояние между астероидом и Солнцем, $m_a = 2.7 \times 10^{10}$ кг – масса астероида, m_c – мас-

са Солнца. Таким образом, $R_a \sim 1.7$ км. Орбита спутника астероида принята круговой радиуса 0.5 км. Тогда разность между второй и первой космической скоростью для Апофиса составляет ~ 0.02 м/с. Гашение этой скорости при тяге 0.3 Н занимает около минуты и требует около одного грамма топлива. Поэтому, в оценочных расчетах расходом массы, необходимым для торможения КА в момент t_1 , а также последующего разгона в момент t_2 можно пренебречь. Таким образом, полагаем, что массу КА в момент начала второго этапа гелиоцентрического движения можно определить:

$$m(t_2) = m(t_1), \quad (13)$$

где $m(t_1)$ вычисляется по формуле (5).

3.4. Второй этап гелиоцентрического движения

На втором этапе гелиоцентрического движения КА совершает перелет от астероида к Земле. При этом предполагается, что в момент времени t_3 КА входит в атмосферу Земли и за счет этого гасит свою избыточную скорость. Таким образом, граничные условия для данного этапа задаются в виде:

$$\mathbf{r}(t_2) = \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{v}(t_2) = \mathbf{v}_2, \quad (14)$$

$$\mathbf{r}(t_3) = \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{v}(t_3) \rightarrow \text{var},$$

где векторы $\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2$ соответствуют радиусу-вектору и вектору скорости Апофиса в момент t_2 , а вектор \mathbf{r}_3 – радиусу-вектору Земли в момент t_3 . Масса КА в конце второго гелиоцентрического этапа вычисляется аналогично (5):

$$m(t_3) = \frac{2N_{\text{дв}}}{2N_{\text{дв}} + m(t_2)J_2} m(t_2), \quad (15)$$

где

$$J_2 = \int_{t_2}^{t_3} u^2 dt. \quad (16)$$

Полагая, что никаких ограничений на управляющее ускорение не накладывается, сформулируем следующую вспомогательную подзадачу.

Подзадача 4. Найти такое управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(opt)}$, что траектория (2) удовлетворяет условиям (14) при $V_\infty = 0$, а функционал (16) минимален. Временной интервал $t_3 - t_2$ фиксирован.

Решение подзадачи 4 отыскивается способом, изложенным в разделе 3.2, при условии, что вместо величин t_0 и t_1 следует использовать t_2 и t_3 . При этом следует также учитывать, что поскольку вектор скорости КА в момент t_3 не задан, из условий трансверсальности (Понтрягин и др., 1983; Болтянский, 1969) следует:

$$\boldsymbol{\psi}_v(t_3) = 0. \quad (17)$$

Таким образом, вектор невязок краевых условий трансформируется к виду:

$$\sigma^T(\psi(t_2)) = [(\psi_v(t_3))^T, (\mathbf{r}(t_3) - \mathbf{r}_3)^T]^T.$$

В остальном алгоритм решения подзадачи 4 аналогичен алгоритму решения подзадачи 2.

4. РЕШЕНИЕ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СЛУЧАЯ ИДЕАЛЬНОЙ ТЯГИ И НУЛЕВОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ИЗБЫТКА СКОРОСТИ

Приведем алгоритм отыскания оптимальных параметров экспедиции Земля–Апофис–Земля. Он базируется на материале, изложенном в разделе 3, и состоит из трех основных фаз: фазы подготовки данных, фазы определения нулевого приближения для оптимальных параметров экспедиции и заключительной фазы.

На фазе подготовки данных:

– для различных моментов времени t_0 , соответствующих началу первого геоцентрического этапа экспедиции, из априорно заданного интервала дат старта $T_0 = [25.06.2019 \text{ г.}; 27.09.2022 \text{ г.}]$, для различных продолжительностей перелета от Земли до астероида Δt_0 из множества $\Delta T = \{185, 230, 275, 320, 365, 410, 455, 500, 545\}$ решается подзадача 2 и находится функционал для этого этапа полета $J_1(t_0, \Delta t_0)$;

– для различных моментов времени t_2 , соответствующих началу второго гелиоцентрического этапа экспедиции из априорно заданного интервала дат старта $T_2 = [15.06.2017 \text{ г.}; 27.09.2022 \text{ г.}]$, для различных продолжительностей перелета от астероида до Земли Δt_2 из множества ΔT решается подзадача 4 и находится функционал для этого этапа полета $J_2(t_2, \Delta t_2)$;

– массивы данных $J_1(t_0, \Delta t_0)$ и $J_2(t_2, \Delta t_2)$ запоминаются с целью их дальнейшего использования.

В фазе определения нулевого приближения для оптимальных параметров экспедиции:

– для различных моментов времени t_0 , Δt_0 определяются текущие величины $t_1 = t_0 + \Delta t_0$, $t_2 = t_1 + \Delta t_a$, $\Delta t_2 = \Delta t - \Delta t_0 - \Delta t_a$, $t_3 = t_2 + \Delta t_2$;

– на основе подготовленных данных $J_1(t_0, \Delta t_0)$ и $J_2(t_2, \Delta t_2)$ для всех вычисленных текущих значений t_0 , Δt_0 , t_2 , Δt_2 при помощи интерполяции определяется суммарное значение функционала $J = J_1(t_0, \Delta t_0) + J_2(t_2, \Delta t_2)$;

– нулевое приближение $t_0^{(0)}$, $\Delta t_0^{(0)}$, $t_2^{(0)}$, $\Delta t_2^{(0)}$ для оптимальных параметров экспедиции находится из условия минимума суммарного функционала J .

Оптимальные характеристики экспедиции при идеальной тяге и нулевой скорости на бесконечности

$t_0^{(\text{opt})}$, дата	$\Delta t_0^{(\text{opt})}$, сутки	$m(t_1)$, кг
22.04.2020	388	1404
$t_2^{(\text{opt})}$, дата	$\Delta t_2^{(\text{opt})}$, сутки	$m(t_3)$, кг
14.05.2021	312	1371

Наконец в финальной фазе алгоритма в окрестности найденного нулевого приближения $t_0^{(0)}$, $\Delta t_0^{(0)}$, $t_2^{(0)}$, $\Delta t_2^{(0)}$ методом перебора определяются точные оптимальные значения $t_0^{(\text{opt})}$, $\Delta t_0^{(\text{opt})}$, $t_2^{(\text{opt})}$, $\Delta t_2^{(\text{opt})}$, а также другие параметры экспедиции.

На рис. 1 представлены зависимости функционала $J_1(t_0, \Delta t_0)$ для различных дат начала первого этапа гелиоцентрического перелета из интервала T_0 и различных продолжительностей Δt_0 из множества ΔT .

На рис. 2 представлены зависимости функционала $J_2(t_2, \Delta t_2)$ для различных дат начала второго этапа гелиоцентрического перелета из интервала T_2 и различных продолжительностей Δt_2 из множества ΔT . Зависимость суммарного оптимального функционала J для общей продолжительности экспедиции, равной 2 года, представлена на рис. 3. Здесь точка T_E показывает оптимальный момент отлета КА от Земли.

На основе полученных таким образом данных можно следующим образом определить массу КА для ИТ. В соответствии с результатами решения подзадачи 1 (раздел 3.1) имеем $m(t_0) = 1630$ кг. Величина $m^{(\text{opt})}(t_1)$ вычисляется по формуле (5) для $J_1 = J_1(t_0^{(\text{opt})}, \Delta t_0^{(\text{opt})})$. Из (13) следует, что $m^{(\text{opt})}(t_2) = m^{(\text{opt})}(t_1)$. Тогда $m^{(\text{opt})}(t_3)$ получим из (15) при $J_2 = J_2(t_2^{(\text{opt})}, \Delta t_2^{(\text{opt})})$. Указанные оптимальные значения времен и массы $m(t_1)$, $m(t_3)$ экспедиции КА к астероиду Апофис приведены выше в таблице.

Масса СА у Земли оценивается по формуле:

$$m_{\text{CA}} = m(t_3) - m_{\text{бл}} - k_r(m(t_0) - m(t_3)),$$

где $m_{\text{бл}} = 300$ кг – масса транспортного блока, электроракетных двигателей и солнечных батарей, $k_r = 0.2$. Для ИТ масса $m_{\text{CA}} = 1019$ кг.

5. ОПТИМИЗАЦИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ИЗБЫТКА СКОРОСТИ

Дальнейшее увеличение конечной массы КА может быть достигнуто за счет сообщения КА при разгоне с промежуточной орбиты у Земли допол-

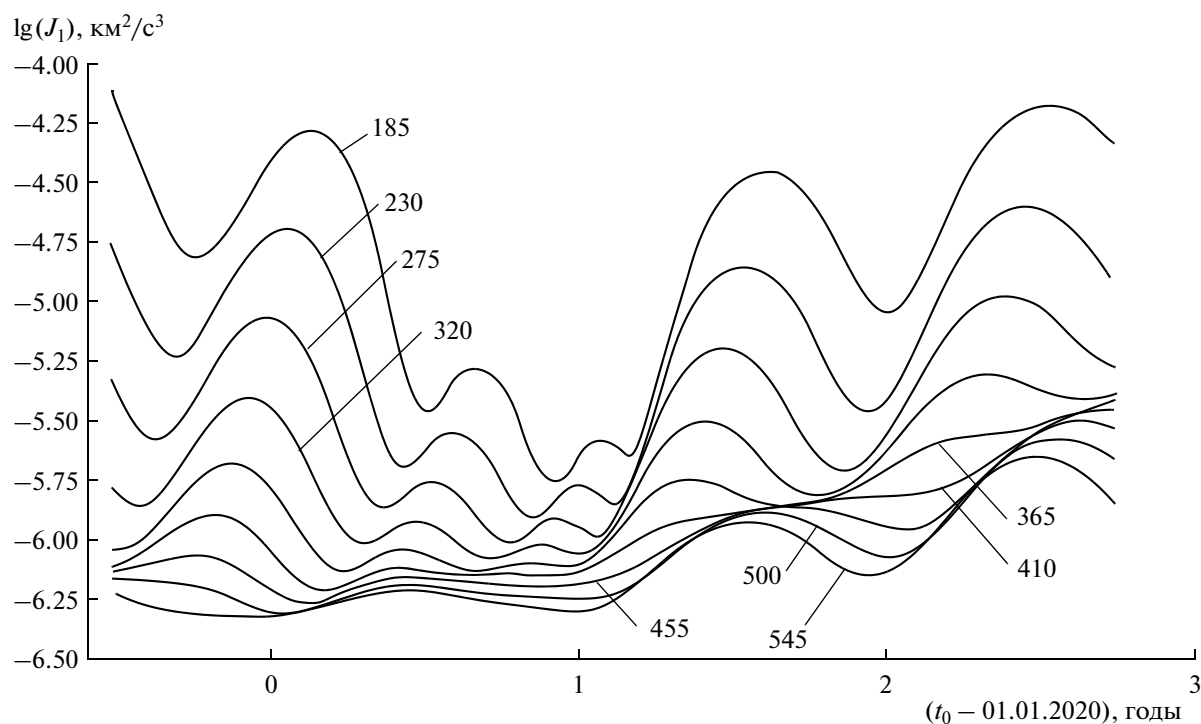


Рис. 1. Зависимости оптимального функционала $J_1 = J_1(t_0, \Delta t_0)$ от времени начала экспедиции для различных значений продолжительности первого гелиоцентрического этапа экспедиции в сутках.

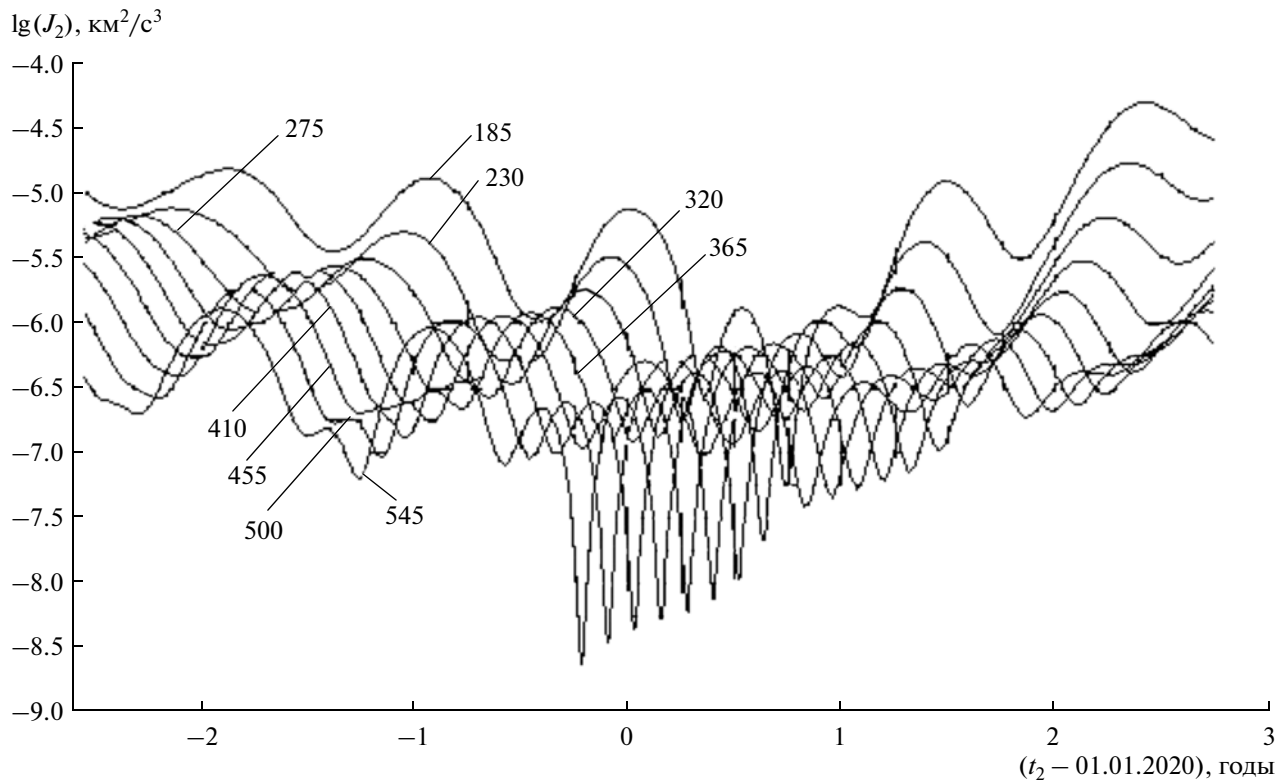


Рис. 2. Зависимости оптимального функционала $J_2 = J_2(t_2, \Delta t_2)$ от времени отлета от астероида для различных значений продолжительности второго гелиоцентрического этапа экспедиции в сутках.

нительного импульса скорости. При помощи этого импульса и формируется гиперболическая орбита отлета с некоторой оптимальной скоростью на “бесконечности” V_∞ . Сформулируем следующую подзадачу.

Подзадача 5. Найти такое управление $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^{(opt)}(t)$, а также такие начальные параметры $\mathbf{l} = \mathbf{l}^{(opt)}$, что при заданном значении V_∞ траектория (2) удовлетворяет (7) и функционал (6) минимален. Временной интервал $t_1 - t_0$ фиксирован.

Решение подзадачи 5 отыскивается основе принципа максимума Понтрягина. Из условий трансверсальности следует:

$$\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0 + V_\infty \frac{\Psi_v(t_0)}{\Psi_v(t_0)}, \quad (18)$$

где $\Psi_v(t_0) = |\Psi_v(t_0)|$. К двухточечной нелинейной краевой задаче (2), (7), (10), (11), (18) применяется метод продолжения по параметру. При этом в качестве нулевого приближения начального сопряженного вектора $\Psi^{(0)}(t_0)$ берется вектор $\mathbf{p}(t_0)$. Определение основных параметров экспедиции осуществляется в соответствии со следующим алгоритмом:

- в предположении, что гиперболический избыток скорости равен нулю, решается основная задача (см. пункт 4) и находятся значения $t_0^{(opt)}$, $\Delta t_0^{(opt)}$, $t_2^{(opt)}$, $\Delta t_2^{(opt)}$;

- задается величина V_∞ , решается подзадача 1 и определяется соответствующее значение массы КА $m(t_0)$;

- решается подзадача 5, определяется функционал (6), а также (по формуле (5)) масса КА в конце первого гелиоцентрического этапа;

- на основе результатов подзадачи 3 определяется масса КА в момент начала второго гелиоцентрического этапа $m(t_2)$;

- по формуле (15) для $J_2 = J_2(t_2^{(opt)}, \Delta t_2^{(opt)})$ находится $m(t_3)$;

- оптимальная величина $V_\infty = V_\infty^{(opt)}$ определяется в результате перебора допустимых значений V_∞ из условия максимума величины $m(t_3)$.

Расчеты показывают, что $V_\infty^{(opt)} = 0.97$ км/с, $m(t_0) = 1597$ кг, $m(t_1) = 1465$ кг, а конечная масса КА составляет $m(t_3) = 1429$ кг. При этом $m_{CA} = 1095$ кг. Таким образом, суммарный выигрыш в массе СА от использования дополнительного импульса скорости у Земли составляет 76 кг для случая ИТ.

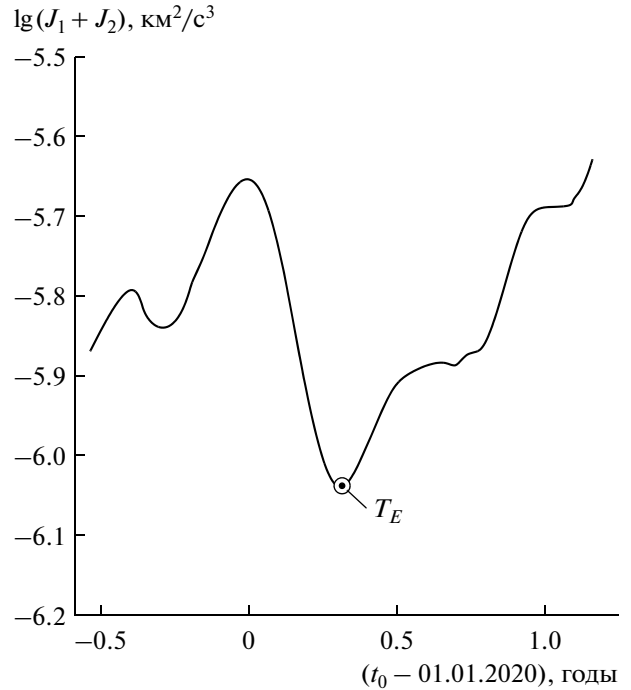


Рис. 3. Зависимость оптимального суммарного функционала $J_1(t_0, \Delta t_0) + J_2(t_2, \Delta t_2)$ от времени начала экспедиции для суммарной продолжительности экспедиции 2 года и времени пребывания КА на орбите Апофиса 1 месяц.

6. УЧЕТ КУСОЧНО-ПОСТОЯННОГО ХАРАКТЕРА МАЛОЙ ТЯГИ

Представим вектор управляющего ускорения \mathbf{u} из системы (2) в виде:

$$\mathbf{u} = \frac{F}{m} \mathbf{e}, \quad (19)$$

где F – величина силы тяги для ДМТ, \mathbf{e} – единичный вектор. Следует отметить, что на практике тяга F обычно ограничена и носит ступенчатый характер, т.е.

$$F \in \{0, F_{max}\}. \quad (20)$$

Выше обозначено:

$$F_{max} = \beta W_e = \frac{2N_{дв}}{W_e}. \quad (21)$$

Выражая секундный массовый расход β из (21) и подставляя его в (3), получим:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{F}{W_e}. \quad (22)$$

Сформулируем подзадачу, позволяющую моделировать движение КА под действием кусочно-постоянной тяги на первом гелиоцентрическом этапе перелета.

Подзадача 6. Для заданной величины $V_\infty = V_\infty^{(\text{opt})}$ найти такие функции $F(t) = F^{(\text{opt})}(t)$, $\mathbf{e}(t) = \mathbf{e}^{(\text{opt})}(t)$ и параметр $\mathbf{l} = \mathbf{l}^{(\text{opt})}$, что траектория (2), (22) удовлетворяет условиям (1), (18), (7) и функционал (в форме Майера):

$$J_1 = m(t_1) \quad (23)$$

максимален. Временной интервал $t_1 - t_0$ фиксирован.

Решение подзадачи 6 отыскивается основе принципа максимума Понтрягина (Чернов, 2001). Для гамильтониана вида:

$$H = \Psi_v \left(\mathbf{g}(\mathbf{r}) + \frac{F}{m} \mathbf{e} \right) + \Psi_r \mathbf{v} - \frac{\Psi_m F}{W_e}.$$

Система сопряженных уравнений записывается следующим образом

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_v &= -\Psi_r; \\ \dot{\Psi}_r &= -\mathbf{G}^T(\mathbf{r})\Psi_v; \\ \dot{\Psi}_m &= \frac{F}{m^2}(\mathbf{e}\Psi_v). \end{aligned} \quad (24)$$

Из условий трансверсальности следует:

$$\Psi_m(t_1) = 1. \quad (25)$$

Оптимальное управление определяется по формулам:

$$\mathbf{e}^{(\text{opt})} = \frac{\Psi_v}{|\Psi_v|}, \quad F^{(\text{opt})} = \begin{cases} F_{\max}, & \text{если } |\Psi_v| > \frac{m\Psi_m}{W_e}; \\ 0, & \text{если } |\Psi_v| \leq \frac{m\Psi_m}{W_e}. \end{cases} \quad (26)$$

Обозначим далее $\Psi^T = \{\Psi_v^T, \Psi_r^T, \Psi_m\}$. Вектор невязок краевых условий трансформируется к виду:

$$\begin{aligned} \sigma(\Psi(t_0))^T &= \\ &= \{(\mathbf{v}(t_1) - \mathbf{v}_1)^T, (\mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}_1)^T, \Psi_m(t_1) - 1\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Решение краевой задачи принципа максимума для (2), (22), (24) при условиях (1), (7), (18), (25) и (26) отыскивается методом продолжения по параметру, аналогично подзадаче 2.

Сформулируем далее подзадачу, позволяющую моделировать движение КА под действием кусочно-постоянной тяги на втором гелиоцентрическом этапе перелета. Для движения от Апофиса к Земле нужно решение подзадачи 7.

Подзадача 7. При $V_\infty = 0$ найти такие функции $F(t) = F^{(\text{opt})}(t)$, $\mathbf{e}(t) = \mathbf{e}^{(\text{opt})}(t)$, что траектория (2), (22) удовлетворяет условиям (14) и функционал (в форме Майера):

$$J_2 = m(t_3) \quad (28)$$

максимален. Временной интервал $t_3 - t_2$ фиксирован, масса $m(t_2)$ задана.

Решение подзадачи 7 отыскивается так же, как и решение подзадачи 6, при условии, что вместо величин t_0 и t_1 следует использовать t_2 и t_3 . При этом следует также учитывать, что поскольку вектор скорости КА в момент t_3 не задан, выполняется соотношение (17). Таким образом, вектор невязок краевых условий трансформируется к виду:

$$\sigma^T(\Psi(t_2)) = \{(\Psi_v(t_3))^T, (\mathbf{r}(t_3) - \mathbf{r}_3)^T, \Psi_m(t_3) - 1\}.$$

В остальном, алгоритм решения подзадачи 7 аналогичен алгоритму решения подзадачи 6.

Таким образом, алгоритм определения параметров экспедиции для кусочно-постоянной тяги состоит в последовательном применении подзадач 1, 6, 3 и 7. Оптимальные траектории перелета КА на первом и втором гелиоцентрических участках, а также орбиты Земли и Апофиса приводятся на рис. 4 и 5.

Графики изменения модуля управляющего ускорения ДМТ приводятся на рис. 6 и 7 (сплошные линии для случая КПТ, пунктирные линии для ИТ).

Расчеты показывают, что при $V_\infty^{(\text{opt})} = 0.97$ км/с начальная масса будет $m(t_0) = 1597$ кг, $m(t_1) = 1392$ кг, а конечная масса КА составляет $m(t_3) = 1336$ кг. При этом $m_{CA} = 984$ кг. Дополнительные расчеты показывают, что при условии $V_\infty = 0$ масса СА для КПТ составляет 934 кг. Таким образом, суммарный выигрыш от использования дополнительного импульса скорости у Земли составляет 50 кг для случая КПТ.

7. ОПТИМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ ДЛЯ СЛУЧАЯ ПОЛЕТА С БОЛЬШОЙ ТЯГОЙ

В случае полета с большой тягой рассматривались следующие этапы экспедиции к Апофису: а) геоцентрический участок разгона КА с помощью двигателей большой тяги (ДБТ) блока “Фрегат”, который отделяется после разгона, и полета в сфере действия Земли; б) гелиоцентрический участок пассивного перелета КА от Земли к Апофису; в) приастероидный участок полета – торможение и выход КА на орбиту искусственного спутника астероида с помощью второго блока с ДБТ, пребывание у астероида в течение 7 дней с возможной посадкой на поверхность астероида и последующий разгон КА до необходимой энергии для полета к Земле; г) гелиоцентрический участок перелета КА от Апофиса к Земле; д) геоцентрический участок возвращения КА к Земле, отделение спускаемого аппарата, вход в атмосферу Земли, торможение в атмосфере и посадка на Землю.

Для определения траекторий экспедиции, как и в случае малой тяги, задаются: время начала

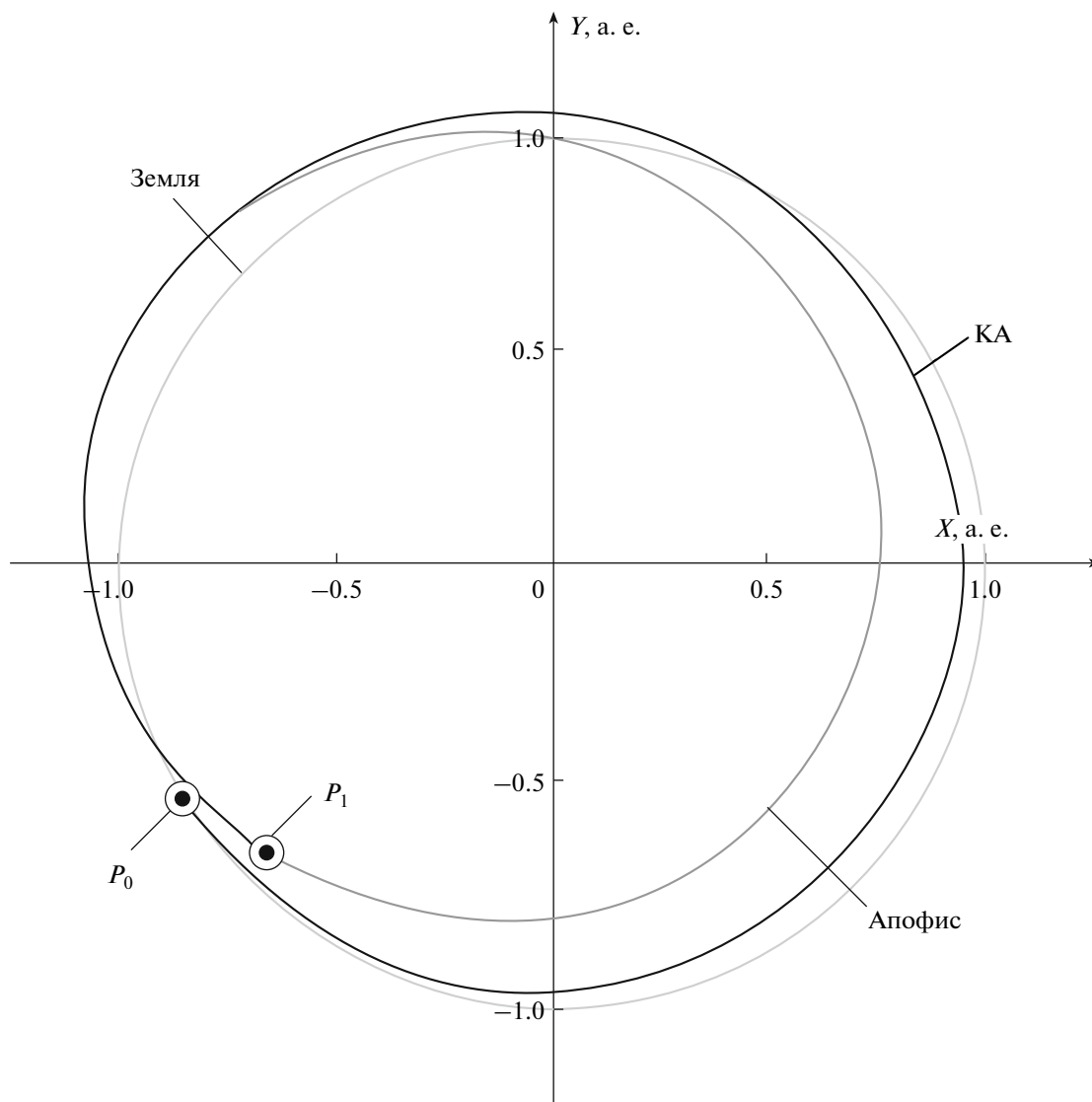


Рис. 4. Орбиты Апофиса, Земли, а также оптимальная траектория перелета КА от Земли к Апофису с ДМТ (точки P_0 и P_1 соответствуют моментам отлета от Земли t_0 и подлета к Апофису t_1).

экспедиции t_1 , длительность Δt_1 полета от Земли до Апофиса и суммарная длительность экспедиции $\Delta t = \Delta t_\Sigma$. Тогда время прилета к астероиду $t_2 = t_1 + \Delta t_1$, время отлета от астероида к Земле $t_3 = t_2 + 7$ сут, время прилета к Земле $t_4 = t_1 + \Delta t_\Sigma$.

Гелиоцентрические орбиты для перелета от Земли к Апофису и от Апофиса к Земле определяются двукратным решением задачи Эйлера–Ламберта (с учетом возможности совершения одного пассивного витка по орбите). Это позволяет найти скорости “на бесконечности”: при отлете от Земли $V_{\infty 1}$, при подлете к Апофису $V_{\infty 2}$, при отлете от астероида $V_{\infty 3}$ и при подлете к Земле $V_{\infty 4}$. Данные скорости определяют импульсы скорости для разгона от Земли ΔV_1 , для торможения у астероида ΔV_2 , для разгона от Апофиса ΔV_3 , что дает воз-

можность найти расходы топлива на три данные операции и конечную массу КА m_f , а затем, после учета отделения второго блока ДБТ, – и полезную массу m_{CA} . При этом для данного блока полагаем, что удельная тяга равна 304 с, а отделяемая масса равна:

$$\Delta m_2 = m_{20} + a_{T2} m_{T2},$$

здесь m_{20} (=100 кг) – постоянная составляющая, a_{T2} (=0.15) – коэффициент массы топливных баков, m_{T2} – масса топлива на торможение и разгон у астероида.

Оптимальные траектории с максимальной полезной массой находятся варьированием начального времени t_1 в диапазоне [01.05.2019 г.; 31.12.2022 г.] и времени перелета от Земли к Апо-

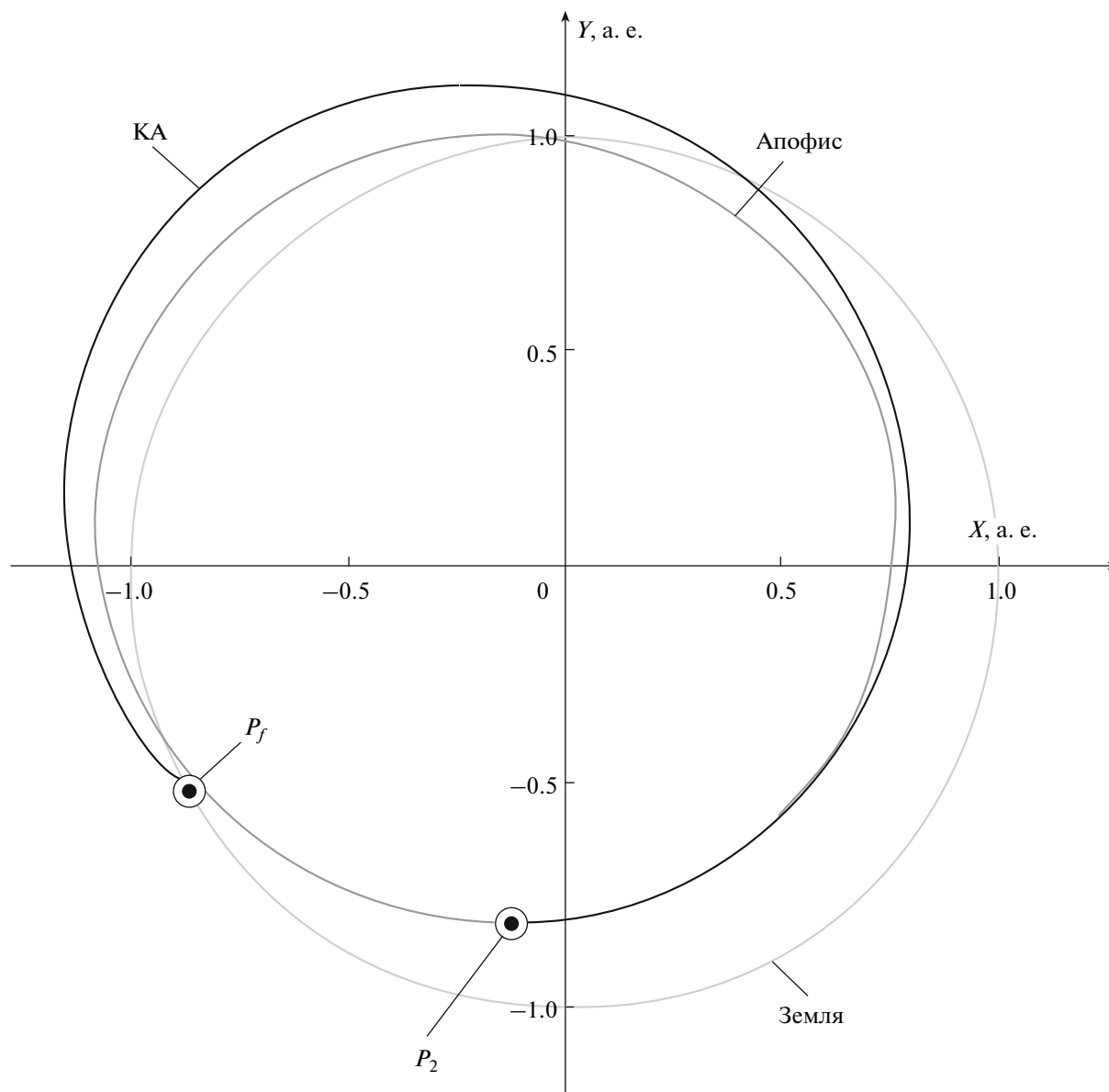


Рис. 5. Орбиты Апофиса, Земли, а также оптимальная траектория перелета КА на втором гелиоцентрическом этапе экспедиции с ДМТ (точки P_2 и P_f соответствуют моментам отлета от Апофиса t_2 и подлета к Земле t_3).

фису Δt_1 для разных продолжительностей экспедиции Δt_2 (от 390 до 730 сут). Для оптимальной экспедиции получено $\Delta t_2 = 690$ сут, дата отлета от Земли 24.05.2019 г., длительность перелета Земля–Апофис 335 сут, дата отлета от Апофиса 30.04.2020 г.; дата прилета к Земле 13.04.2021 г. Для нее конечная масса КА $m_f = 510$ кг, полезная масса, масса СА $m_{CA} = 265$ кг. На рис. 8 приведена траектория КА для этой экспедиции.

Видим, что с помощью обычных двигательных систем с большой тягой, в принципе, также может быть осуществлена экспедиция к астероиду Апофис с возвращением к Земле. Видно также, что применение новых электро-реактивных дви-

гательных установок малой тяги позволяет существенно улучшить энергетические характеристики экспедиции.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована задача определения энергетически оптимальных траекторий экспедиции КА по маршруту Земля–Апофис–Земля. Даны количественные оценки характеристик такого перелета при условии, что вывод КА на околоземную орбиту осуществляется ракетой-носителем Союз-ФГ, дополнительный набор скорости обеспечивается ДБТ разгонного блока “Фрегат”, а управление полетом на гелиоцентрических эта-

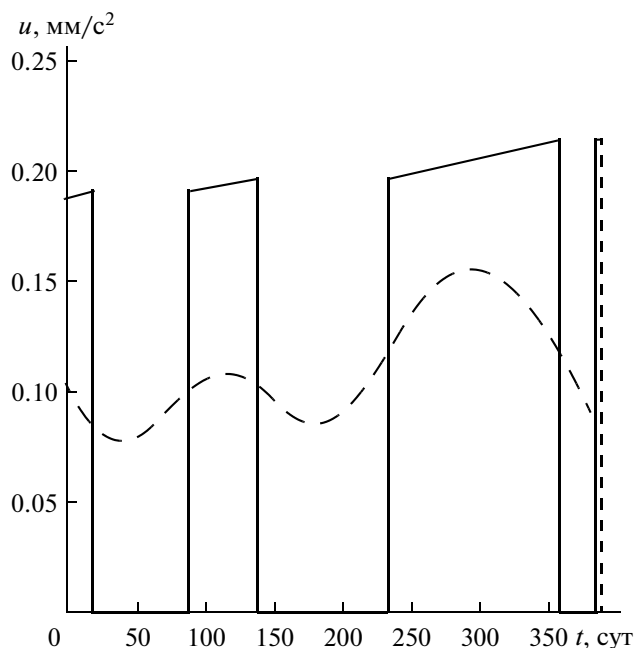


Рис. 6. Зависимости величины реактивного ускорения $|\mathbf{u}^{(opt)}(t)|$ ДМТ от времени полета КА на первом гелиоцентрическом этапе экспедиции.

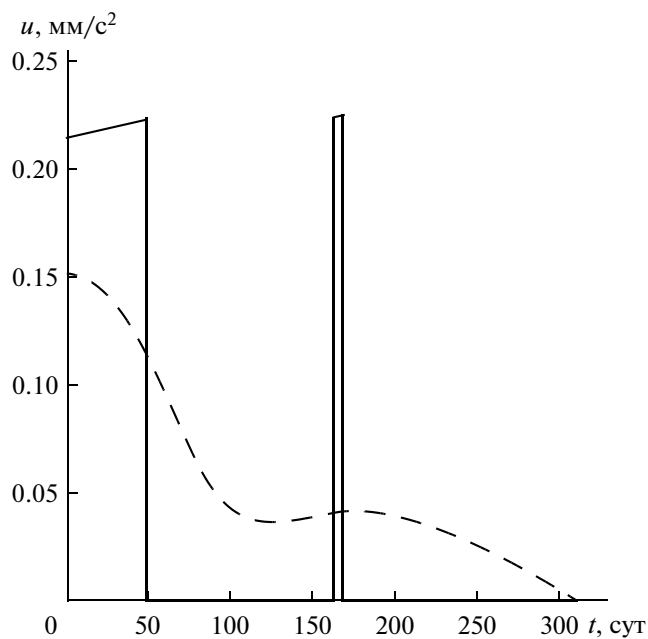


Рис. 7. Зависимости величины реактивного ускорения $|\mathbf{u}^{(opt)}(t)|$ ДМТ от времени полета КА на втором гелиоцентрическом этапе экспедиции.

пах осуществляется за счет электрореактивных ДМТ. На основе разработанного метода оптимизации для широкого диапазона начальных условий, а также для различных продолжительностей гелиоцентрических этапов перелета построено несколько семейств оптимальных траекторий КА

с малой идеально-регулируемой тягой. При этом полагалось, что общая продолжительность экспедиции, а также время нахождения КА на орбите Апофиса заданы. Определена дата старта, а также продолжительности гелиоцентрических этапов перелета, которые обеспечивают наилучшее зна-

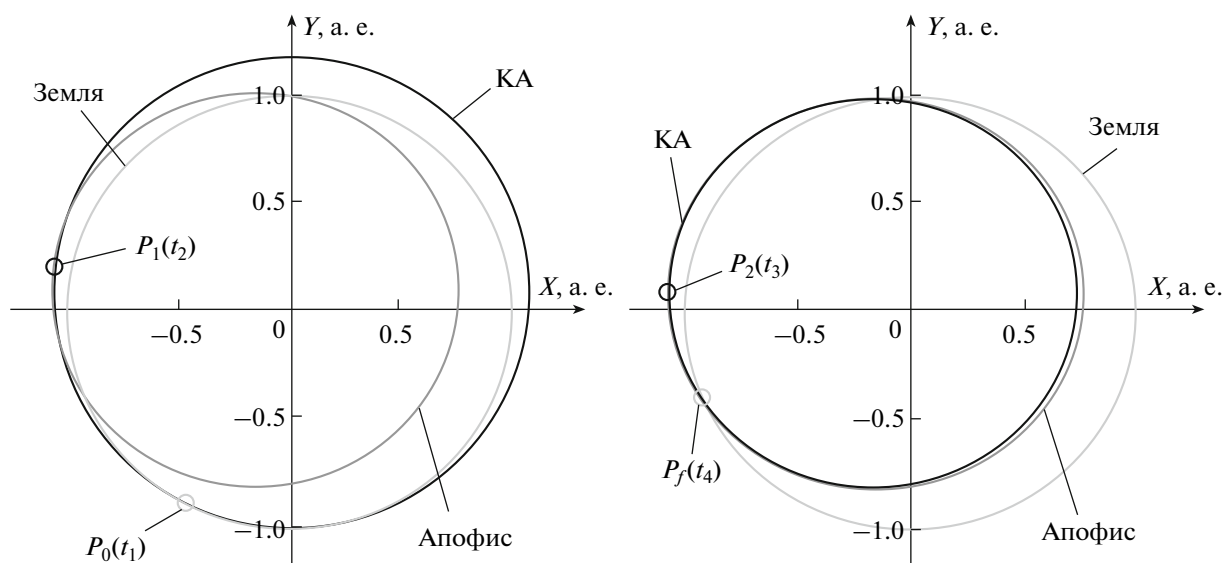


Рис. 8. Орбиты Апофиса, Земли, а также оптимальные траектории перелета КА Земля–Апофис (слева) и Апофис–Земля (справа) с ДБТ. Точки P_0 и P_f соответствуют моментам начала и конца экспедиции, точка P_1 соответствует моменту прилета КА к Апофису, точка P_2 соответствует моменту отлета КА от Апофиса.

чение массы СА у Земли. Для соответствующей этим условиям оптимальной траектории определены оптимальная величина и направление гиперболического избытка скорости КА. Также построена оптимальная траектория перелета КА с кусочно-постоянной тягой. Дана оценка величины массы СА у Земли. Она составляет ~1000 кг.

Сделан также анализ возможности осуществления экспедиции с помощью обычных двигателей большой тяги на основе ракеты-носителя Союз-ФГ. Показано, что и в этом случае экспедиция может быть осуществлена в 2019–2021 гг. Однако по сравнению со случаем малой тяги возвращаемая масса КА уменьшается, до ~250 кг.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ № 09-01-00710) и Программы поддержки ведущих научных школ России (грант № НШ-6700.2010.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Автоматические космические аппараты для фундаментальных и прикладных научных исследований / Ред. Полищук Г.М. и Пичхадзе К.М. М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010. 660 с.
- Ахметшин Р.З., Ефимов Г.Б., Жирнов В.А., Энеев Т.М.* О возможности достижения астероидов главного пояса космическим аппаратом с ЭРД // Препр. Ин-та прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. 2004. № 77. 32 с.
- Белецкий В.В.* Очерки о движении космических тел. М.: Изд-во ЛКИ, 2009. 432 с.
- Белецкий В.В., Егоров В.А.* Межпланетные полеты с двигателем постоянной мощности // Космич. исслед. 1964. Т. 2. № 3. С. 360–391.
- Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: Изд-во иностранной литературы, 1960. 400 с.
- Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. Изд. 2-е. М.: Наука, 1969. 408 с.
- Григолюк Э.И., Шалашин В.И.* Проблемы нелинейного деформирования. М.: Наука, 1988. 232 с.
- Гродзовский Г.М., Иванов Ю.Н., Токарев В.В.* Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М.: Наука, 1975. 704 с.
- Жулин С.С.* Метод продолжения по параметру и его приложение к задачам оптимального управления // Вычислительные методы и программирование. 2007. Т. 8. С. 205–217.
- Ивашкин В.В.* Оптимизация космических маневров при ограничениях на расстояния до планет. М.: Наука, 1975. 392 с.
- Ивашкин В.В., Крылов И.В.* Комплексный метод оптимизации космических траекторий с малой тягой и его применение к задаче перелета от Земли к астероиду Апофис // Препр. Ин-та прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. 2011. № 56. 32 с.
- Ивашкин В.В., Крылов И.В.* Оптимальные траектории перелета КА с малой электрореактивной тягой к астероиду Апофис // ДАН. 2012. Т. 445. № 1. С. 32–36.
- Ивашкин В.В., Стихно К.А.* О предотвращении возможного столкновения астероида Апофис с Землей // Астрон. вестн. 2009. Т. 43. № 6. С. 502–516. (*Ivashkin V.V., Stikhno, S.A.* On the Prevention of a Possible Collision of Asteroid Apophis with the Earth // Sol. Syst. Res. 2009. V. 43. № 6. P. 481–494.)
- Ивашкин В.В., Чернов А.В.* Оптимальные траектории полета КА к сближающемуся с Землей астероиду при использовании малой тяги // Космич. исслед. 2000. Т. 38. № 2. С. 151–163.
- Моисеев Н.Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971. 424 с.
- Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г.* Основы механики космического полета. М.: Наука, 1990. 448 с.
- Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиздат, 1983. 392 с.
- Ц. На.* Вычислительные методы решения граничных задач. М.: Мир, 1982. 296 с.
- Чернов А.В.* Анализ оптимальных перелетов космического аппарата к сближающемуся с Землей астероиду с кусочно-постоянной электрореактивной тягой // Препр. Ин-та прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. 2001. № 86. 24 с.
- Черноузько Ф.Л., Баничук Н.В.* Вариационные задачи механики и управления. Численные методы. М.: Наука, 1973. 240 с.